$$\mathbf{A_B}\,\mathbf{A_B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzoru (1.6), obliczamy:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

1.3.9. Pierwsza dopuszczalna postać bazowa

Chcąc rozpocząć obliczenia za pomocą metody simpleks, trzeba wyznaczyć pierwszą dopuszczalną postać bazową zadania. W poprzednio rozpatrywanym przykładzie otrzymaliśmy ją, wprowadzając zmienne bilansujące. Często jednak otrzymane zadanie nie ma jeszcze tej postaci. Wykonując przekształcenia elementarne, możemy wówczas starać się uzyskać pierwszą dopuszczalną postać bazową. Najczęściej nie jest to jednak wygodne, dlatego też do jej określenia wykorzystamy **zmienne sztuczne**.

Przykład 1.2

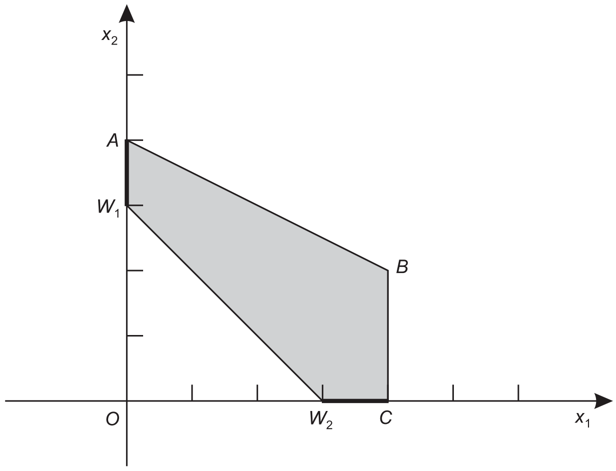
Zarząd firmy ustalił, że łączne rozmiary produkcji nie mogą być mniejsze od 3 jednostek. Wszystkie pozostałe założenia są takie same, jak w przykładzie 1.1.

Otrzymujemy zatem zadanie:

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max, \\ &2x_1 + 2x_2 \leqslant 14, \\ &\ \ x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ &4x_1 \qquad\ \ \leqslant 16, \\ &\ \ x_1 + \ \ x_2 \geqslant 3, \\ &x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ilustrację graficzną zbioru rozwiązań dopuszczalnych przedstawiono na rys. 1.12.

Rysunek 1.12



Nie wszystkie rozpatrywane uprzednio rozwiązania pozostają rozwiązaniami dopuszczalnymi. W szczególności wierzchołek O nie jest już wierzchołkiem dopuszczalnym. Widzimy ponadto, że punkty W_1 i W_2 stały się nowymi wierzchołkami.

Doprowadzając zadanie do postaci bazowej przez wprowadzenie zmiennych bilansujących x_3, x_4, x_5, x_6 i pomnożenie czwartego warunku ograniczającego przez (-1), otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,\\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14,\\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 8,\\
&4x_1 + x_5 = 16,\\
&-x_1 - x_2 + x_6 = -3,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Zmienne x_3, x_4 i x_5 zostały już zdefiniowane uprzednio, natomiast zmienną x_6 określamy następująco:

$$x_6 = x_1 + x_2 - 3.$$

Przyjmujemy, tak jak poprzednio, $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$, stąd otrzymujemy rozwiązanie bazowe:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 14,\ x_4 = 8,\ x_5 = 16,\ x_6 = -3,$$

które nie jest jednak rozwiązaniem dopuszczalnym. W takiej sytuacji, jak opisana powyżej, można uzyskać pierwszą dopuszczalną postać bazową przez wprowadzenie do zadania zmiennej sztucznej x_7. Dopisujemy ją do ostatniego równania, które przyjmuje wówczas postać:

$x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 3.$

Oczywiście rozwiązanie zadania zmodyfikowanego nie jest zazwyczaj równoważne rozwiązaniu zadania wyjściowego. Jest tak jedynie wówczas, gdy wprowadzona dodatkowo zmienna sztuczna przyjmie w ostatnim rozwiązaniu, otrzymanym po zastosowaniu metody simpleks, wartość zero. Najczęściej związane to jest z uprzednim wyeliminowaniem zmiennej sztucznej z bazy. Aby nastąpiło to szybko, do funkcji celu wprowadzamy zmienną sztuczną ze współczynnikiem, który generuje dużą stratę, dopóki dołączona zmienna sztuczna pozostaje zmienną bazową. Przyjmiemy ten współczynnik na poziomie $-M$, gdzie M jest bardzo dużą liczbą dodatnią.

Otrzymujemy wówczas zadanie w następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 + 3x_2 - Mx_7 \to \max,\\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14,\\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 8,\\
&4x_1 + x_5 = 16,\\
&x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 3,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Tablica 1.10 to tablica simpleksowa odpowiadająca zadaniu rozszerzonemu. Przyjęliśmy ponadto[6], że $M = 300$.

Tablica 1.10

cx $\to$ max		2	3	0	0	0	0	−300	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_7	−300	1	1	0	0	0	−1	1	3
$c_j - z_j$		302	303	0	0	0	−300	0	−900

W pierwszej iteracji zmiennymi bazowymi są: x_3, x_4, x_5 i x_7. Po wykonaniu czterech iteracji otrzymujemy (tablica 1.11):

[6] Jest to najmniejsza wartość współczynnika M, którą możemy w tym przypadku wykorzystać w programie SIMP.EXE.

Tablica 1.11

cx → max		2	3	0	0	0	0	−300	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	−1	−0,25	0	0	2
x_6	0	0	0	0	0,5	0,125	1	−1	3
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_2	3	0	1	0	0,5	−0,125	0	0	2
$c_j - z_j$		0	0	0	−1,5	−0,125	0	−300	14

Mamy rozwiązanie optymalne: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 3$, $x_7 = 0$, któremu odpowiada ponownie wierzchołek B. Wprowadzona do zadania zmienna sztuczna jest niebazowa i przyjmuje w rozwiązaniu optymalnym wartość 0, tak więc rozwiązanie to jest jednocześnie rozwiązaniem problemu wyjściowego, w którym nie ma zmiennych sztucznych.

1.4. Przegląd szczególnych przypadków

Dotychczas zajmowaliśmy się sytuacją, w której interesujące nas zadanie miało dokładnie jedno rozwiązanie optymalne. Nie zawsze tak musi być. Może się zdarzyć, że część wspólna wszystkich warunków ograniczających zadania jest zbiorem pustym, co oznacza, że nie ma żadnego rozwiązania dopuszczalnego, nie ma więc również rozwiązania optymalnego. Zadanie takie nazywamy **zadaniem sprzecznym**. Z kolei może zaistnieć sytuacja, w której będzie więcej niż jedno rozwiązanie optymalne. Nazwiemy je **alternatywnymi rozwiązaniami optymalnymi**. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych może być również nieograniczony. W dalszej części tego podrozdziału rozpatrzymy kolejno wszystkie trzy wymienione powyżej szczególne sytuacje. Zajmiemy się ich interpretacją geometryczną, jak również identyfikacją na podstawie tablic simpleksowych.

1.4.1. Zadanie sprzeczne

Stosując metodę sztucznej zmiennej, można łatwo zidentyfikować problem sprzeczny.

Przykład 1.3

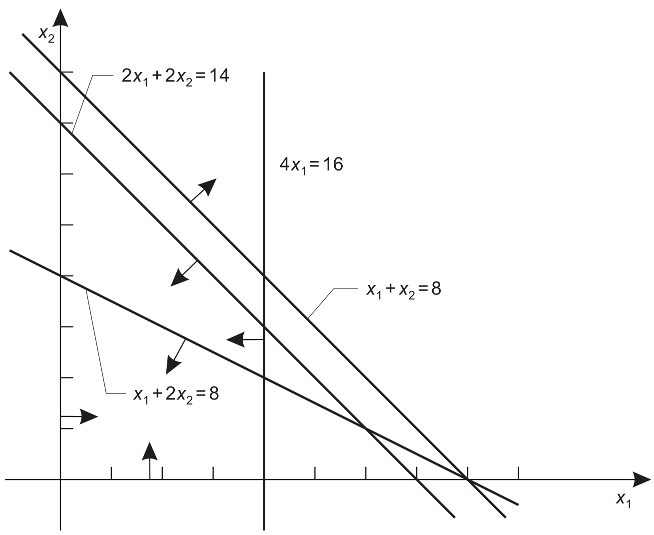
Zarząd firmy ustalił, że łączna wielkość produkcji nie może być mniejsza od 8 jednostek. Wszystkie pozostałe założenia są takie same, jak w przykładzie 1.1.

Można łatwo zauważyć, że wymaganie osiągnięcia łącznego poziomu produkcji nie mniejszego niż 8 jednostek nie jest realne. Dołączenie takiego warunku ograniczającego daje nam następujące zadanie:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,\\
&2x_1 + 2x_2 \leqslant 14,\\
&\ \ x_1 + 2x_2 \leqslant 8,\\
&4x_1 \qquad\ \ \leqslant 16,\\
&\ \ x_1 + \ \ x_2 \geqslant 8,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

które przedstawiono graficznie na rys. 1.13.

Rysunek 1.13



Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty.

Sprowadzając ten problem do postaci bazowej przez wprowadzenie zmiennych bilansujących x_3, x_4, x_5 i x_6 oraz zmiennej sztucznej x_7 ze współczynnikiem $M = 300$, otrzymujemy zadanie:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 + 3x_2 - 300x_7 \to \max,\\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14,\\
&\ \ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8,\\
&4x_1 + x_5 = 16,\\
&\ \ x_1 + x_2 - x_6 + x_7 = 8,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

które można zapisać w postaci simpleksowej (tablica 1.12).

Tablica 1.12

cx → max		2	3	0	0	0	0	−300	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_7	−300	1	1	0	0	0	−1	1	8
c_j-z_j		302	303	0	0	0	−300	0	−2 400

Po wykonaniu trzech iteracji simpleksowych otrzymujemy (tablica 1.13):

Tablica 1.13

cx → max		2	3	0	0	0	0	−300	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	−1	−0,25	0	0	2
x_2	3	0	1	0	0,5	−0,125	0	0	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_7	−300	0	0	0	−0,5	−0,125	−1	1	2
c_j-z_j		0	0	0	−151,5	−37,625	−300	0	−586

Z tablicy tej odczytujemy rozwiązanie optymalne zadania rozszerzonego o zmienną sztuczną. Jest ono następujące: $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=2$, $x_4=0$, $x_5=0$, $x_6=0$, $x_7=2$. Zmienna sztuczna x_7 pozostała niezerową zmienną bazową, co wskazuje na to, że zadanie wyjściowe nie ma rozwiązania. Jeżeli więc okaże się, że w skład zmiennych bazowych rozwiązania optymalnego zadania rozszerzonego wchodzi przynajmniej jedna zmienna sztuczna i jej wartość jest dodatnia, to rozpatrywane zadanie wyjściowe jest sprzeczne[7].

1.4.2. Alternatywne rozwiązania optymalne

Zajmiemy się teraz odpowiedzią na pytanie, czy rozwiązanie optymalne zadania programowania liniowego, o ile istnieje, jest zawsze wyznaczone jednoznacznie, a jeżeli nie, to w jaki sposób wyznaczyć alternatywne rozwiązania optymalne.

---

[7] Trzeba zauważyć, że nie zawsze przynależność zmiennej sztucznej do bazy dopuszczalnej i optymalnej zadania rozszerzonego świadczy o tym, że zadanie wyjściowe jest sprzeczne. Nie będzie tak wówczas, gdy wartość sztucznej zmiennej bazowej jest równa zeru.

Przykład 1.4

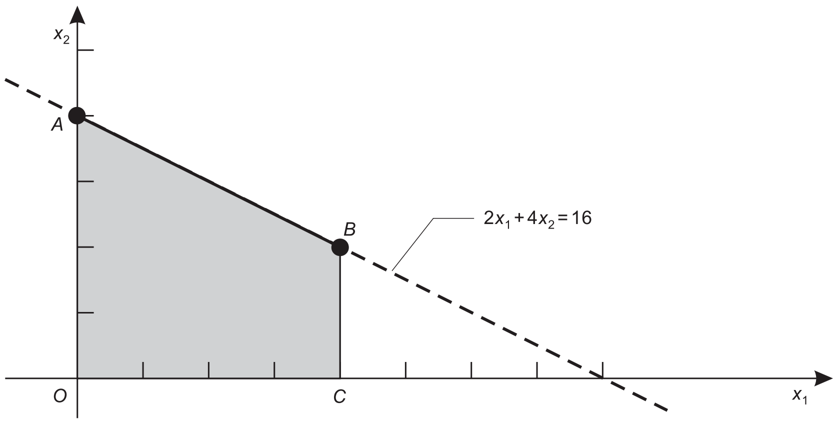
Rozpatrujemy ponownie problem programowania produkcji, opisany w przykładzie 1.1. Uwzględniamy przy tym zmianę zysku jednostkowego dla produktu P_2. Nowy zysk jednostkowy wynosi 4.

Otrzymujemy zadanie:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,\\
&2x_1 + 2x_2 \leqslant 14,\\
&\ \ x_1 + 2x_2 \leqslant \ \ 8,\\
&4x_1 \qquad\quad \leqslant 16,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant \ 0.
\end{aligned}
$$

Rozwiązujemy je metodą geometryczną (rys. 1.14).

Rysunek 1.14



Stwierdzamy, że warstwica funkcji celu, zapewniająca maksymalny zysk, przechodzi teraz przez wierzchołki A i B. Każdy punkt tego odcinka odpowiada alternatywnemu, optymalnemu planowi produkcji, zapewniającemu zysk wynoszący 16 jednostek. Pokazaliśmy zatem, że może się zdarzyć, że rozpatrywany problem ma nieskończenie wiele rozwiązań optymalnych.

Zadanie to możemy również rozwiązać za pomocą tablic simpleksowych. Sprowadzając zadanie do postaci bazowej przez dodanie zmiennych bilansujących x_3, x_4, x_5, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,\\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 14,\\
&\ \ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = \ \ 8,\\
&4x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + x_5 = 16,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Pierwsza tablica simpleksowa ma postać (tablica 1.14):

Tablica 1.14

cx → max		2	4	0	0	0	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	4	0	0	0	0

Po wykonaniu kolejnych przekształceń na początku drugiej iteracji otrzymujemy (tablica 1.15):

Tablica 1.15

cx → max		2	4	0	0	0	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	−1	0	6
x_2	4	0,5	1	0	0,5	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		0	0	0	−2	0	16

Zmiennymi bazowymi są teraz: $x_2 = 4$, $x_3 = 6$ i $x_5 = 16$. Rozwiązanie to odpowiada wierzchołkowi A (rys. 1.14). Wśród wskaźników optymalności dla zmiennych niebazowych znajduje się wskaźnik równy 0 (zmienna x_1). Oznacza to, że wprowadzając do bazy tę zmienną, otrzymamy drugie, alternatywne bazowe rozwiązanie optymalne (odpowiadające na rys. 1.14 wierzchołkowi B). Tablica simpleksowa odpowiadająca temu rozwiązaniu to tablica 1.16.

Tablica 1.16

cx → max		2	4	0	0	0	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	−1	−0,25	2
x_2	4	0	1	0	0,5	−0,125	2
x_1	2	1	0	0	0	0,25	4
$c_j - z_j$		0	0	0	−2	0	16

W nowej tablicy simpleksowej ponownie pojawił się zerowy wskaźnik optymalności dla zmiennej niebazowej x_5, co wskazuje na istnienie rozwiązania alternatywnego, rozpatrywanego już uprzednio. Większa liczba zerowych wskaźników optymalności dla zmiennych niebazowych świadczyłaby o istnieniu większej liczby rozwiązań bazowych alternatywnych. Można byłoby je zidentyfikować, przechodząc do kolejnych baz.

Nawiązując do interpretacji geometrycznej zadania, przypomnijmy, że alternatywnym rozwiązaniem optymalnym jest również każdy punkt odcinka łączącego A i B, czyli każdy punkt spełniający zależność:

$$P = \lambda A + (1 - \lambda)B,$$

przy czym $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Jeżeli mamy większą liczbę alternatywnych bazowych rozwiązań optymalnych $A_1, ..., A_k$, to zbiór $X_{\text{opt.}}$ alternatywnych rozwiązań optymalnych otrzymamy, generując wszystkie możliwe kombinacje wypukłe optymalnych rozwiązań bazowych, co zapiszemy następująco:

$$X_{\text{opt.}} = \{P\colon\ P = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i\},$$

gdzie $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ dla $i = 1, ..., k$ oraz $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Zbiór $X_{\text{opt.}}$ punktów opisanych powyższym wzorem nazywany jest **simpleksem**, stąd też wywodzi się nazwa omawianej przez nas metody.

1.4.3. Nieograniczony zbiór rozwiązań dopuszczalnych

Może zaistnieć sytuacja, w której zbiór rozwiązań dopuszczalnych interesującego nas zadania nie jest pusty, a mimo to nie istnieje rozwiązanie optymalne tego zadania.

Przykład 1.5

Rozpatrzymy problem planowania produkcji, opisany w przykładzie 1.1, w którym występuje jedynie ograniczenie dotyczące środka S_3 (jego zużycie nie może przekraczać 16 jednostek) oraz sformułowane zostało dolne ograniczenie na łączną wielkość produkcji, która nie może być mniejsza od 3 jednostek.

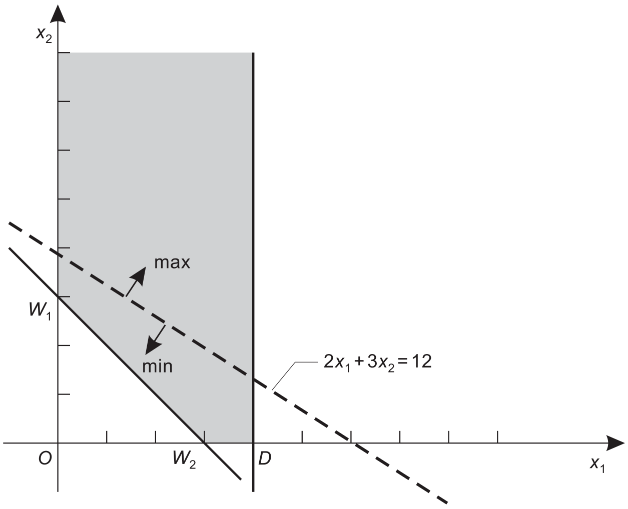
Zmodyfikowany problem można wówczas zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,\\
&4x_1 \leqslant 16,\\
&x_1 + x_2 \geqslant 3,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Otrzymany zbiór punktów płaszczyzny, wyznaczony przez rozpatrywany układ warunków, jest nieograniczony (rysunek 1.15).

Kiedy rozwiązujemy to zadanie metodą geometryczną, stwierdzamy, że przesuwając warstwice funkcji celu coraz wyżej (co jest możliwe dlatego, że zmienna x_2 nie jest ograniczona), otrzymujemy coraz większe wartości funkcji celu. Możemy w ten sposób otrzymać dowolnie dużą wartość funkcji celu. Dlatego też mówimy, że funkcja celu jest nieograniczona (od góry).

Rysunek 1.15



Przedstawimy teraz możliwość identyfikacji sytuacji, w której funkcja celu jest nieograniczona na podstawie analizy tablic simpleksowych. Po wprowadzeniu dodatkowych zmiennych rozpatrywane zadanie możemy zapisać następująco:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,\\
&4x_1 \quad + x_3 \quad = 16,\\
&\ x_1 + x_2 \quad - x_4 = \ 3,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Zapisujemy odpowiednią tablicę simpleksową i otrzymujemy (tablica 1.17):

Tablica 1.17

cx $\rightarrow$ max		2	3	0	0	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	4	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	-1	3
$c_j - z_j$		-1	0	0	3	9

Obecnie należałoby wprowadzić do bazy zmienną x_4, jednakże wszystkie elementy tablicy simpleksowej, odpowiadające tej zmiennej, są niedodatnie. Świadczy to o tym, że możemy nieograniczenie zwiększać wartość zmiennej x_4. Tak więc, jeżeli chcąc wprowadzić do bazy kolejną zmienną, stwierdzimy, że odpowiadająca jej kolumna w tablicy simpleksowej ma wszystkie elementy niedodatnie, oznacza to, że w rozpatrywanym problemie funkcja celu jest nieograniczona od góry.

Zauważmy jednocześnie, że w przypadku, gdy zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest nieograniczony, może istnieć rozwiązanie optymalne. W zadaniu rozpatrywanym na rys. 1.15 byłoby tak wówczas, gdy funkcja celu byłaby minimalizowana. Może również wystąpić przypadek alternatywnych rozwiązań optymalnych.

Przykład 1.6

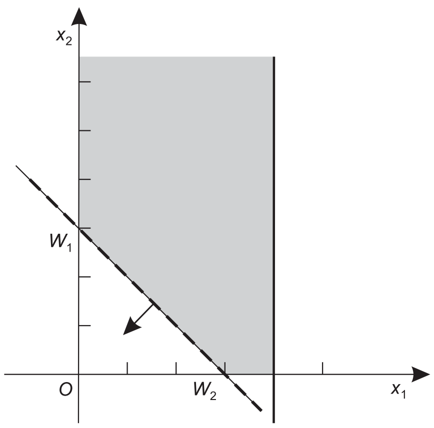
Rozpatrzymy problem planowania produkcji, w którym występuje jedynie ograniczenie dotyczące środka S_3 (jego zużycie nie może przekraczać 16 jednostek) oraz sformułowane zostało dolne ograniczenie na łączną wielkość produkcji, która nie może być mniejsza od 3 jednostek. Koszty jednostkowe, związane z wytwarzanie zarówno produktu P_1, jak i P_2 wynoszą 2. Należy znaleźć plan produkcji, minimalizujący koszty.

Rozpatrywane zadanie możemy zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
&2x_1+2x_2 \to \min,\\
&4x_1 \leqslant 16,\\
&x_1+x_2 \geqslant 3,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania metoda geometryczną przedstawia rysunek 1.16. Mamy

Rysunek 1.16



dwa alternatywne bazowe rozwiązania optymalne: W_1 i W_2 oraz alternatywne niebazowe rozwiązania optymalne, leżące na odcinku łączącym W_1 i W_2.

Rozwiążemy zadanie metodą simpleks. Po wprowadzeniu zmiennych bilansujących otrzymujemy zadanie:

$$
\begin{aligned}
&2x_1+2x_2 \to \min,\\
&4x_1 \quad +x_3 \qquad =16,\\
&x_1+x_2 \qquad -x_4=3,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

oraz tablicę simpleksową (tablica 1.18).

Tablica 1.18

$\mathbf{cx} \to \min$		2	2	0	0	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	4	0	1	0	16
x_2	3	1	1	0	-1	3
c_j-z_j		0	0	0	2	6

Otrzymaliśmy rozwiązanie bazowe odpowiadające wierzchołkowi W_1. Wprowadzając do bazy zmienną x_1, dla której wskaźnik optymalności w rozpatrywanym rozwiązaniu jest równy 0, otrzymany alternatywne bazowe rozwiązanie optymalne, odpowiadające wierzchołkowi W_2.

Ostatni z rozpatrywanych przykładów dotyczy sytuacji, w której zarówno zbiór rozwiązań dopuszczalnych, jak i zbiór rozwiązań optymalnych jest nieograniczony.

Przykład 1.7

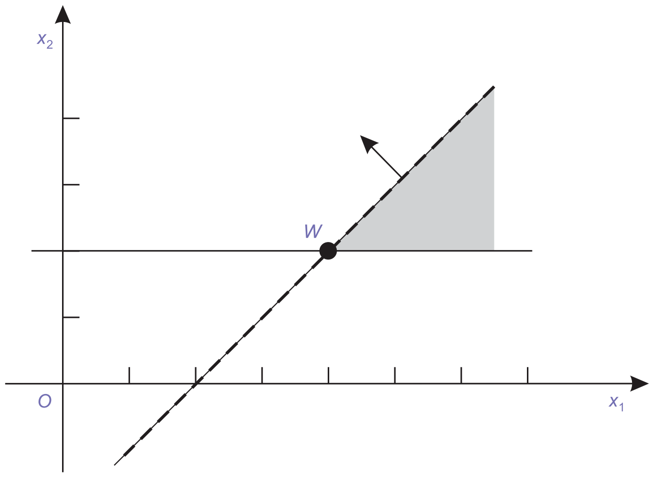
Rozwiążemy zadanie[8]:

$$
\begin{aligned}
&x_1-x_2 \to \max,\\
&x_1-x_2 \geqslant 2,\\
&\qquad x_2 \geqslant 2,\\
&x_1,\ x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Otrzymany zbiór punktów płaszczyzny, wyznaczony przez rozpatrywany układ warunków ograniczających, jest nieograniczony (rys.1.17).

[8] Sytuację opisaną w tym przykładzie trudno interpretować jako szczególny przypadek zadania planowania produkcji. Interpretacja byłaby następująca: należy maksymalizować różnicę między rozmiarami produkcji P_1 i P_2, zakładając, że różnica ta jest nie mniejsza niż 2, a produkcja P_2 jest nie mniejsza od 2.

Rysunek 1.17



Wykorzystując metodę geometryczną, stwierdzamy, że rozwiązaniem optymalnym jest wierzchołek W oraz wszystkie punkty należące do półprostej, wychodzącej z W i będącej brzegiem zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Półprostą tę nazywamy **nieograniczoną krawędzią optymalną generowaną przez wierzchołek** W.

Zajmiemy się identyfikacją tej sytuacji na podstawie analizy tablic simpleksowych. Po wprowadzeniu tablic bilansujących otrzymujemy zadanie:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 \to \max,\\
&x_1 - x_2 - x_3 = 2,\\
&x_2 - x_4 = 2,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Dodając drugie równanie do pierwszego, otrzymujemy zadanie:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 \to \max,\\
&x_1 - x_3 = 4,\\
&x_2 - x_4 = 2,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

które jest w postaci bazowej. Zapisujemy odpowiednią tablicę simpleksową (tablica 1.19).

Otrzymane rozwiązanie bazowe jest optymalne. Zerowy współczynnik optymalności dla zmiennej niebazowej x_4 wskazuje na to, że istnieją rozwiązania optymalne, jednakże ze względu na nieograniczoność obszaru rozwiązań dopuszczalnych nie istnieje drugie bazowe rozwiązanie optymalne, na co wskazuje brak dodatniej wartości w kolumnie macierzy współczynników, odpowiadającej zmiennej x_4.

Tablica 1.19

$\mathbf{cx} \to \min$		1	-1	0	0	**b**
Baza	$\mathbf{c_B}$	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1	0	-1	-1	4
x_2	-1	0	1	0	-1	2
$c_j - z_j$		0	0	1	0	2

1.4.4. Reguły postępowania w metodzie simpleks

Analiza sytuacji, które mogą wystąpić przy rozwiązywaniu zadań programowania liniowego pozwala na uzupełnienie wstępnego opisu metody simpleks, podanego w podrozdziale 1.3.2. Poniżej sformułowane zostały reguły postępowania, uwzględniające również omówione uprzednio szczególne przypadki.

1. ***Uzyskanie pierwszego rozwiązania bazowego***
   Rozwiązanie to uzyskujemy często poprzez przekształcenie zadania wyjściowego do postaci standardowej i wprowadzenie zmiennych bilansujących. Jeżeli okaże się to niewystarczające, wprowadzamy zmienne sztuczne.
2. ***Ocena optymalności rozwiązania***
   Służy do tego kryterium optymalności, wykorzystywane na początku każdej iteracji.
3. ***Badanie niesprzeczności zadania***
   Jeżeli do zadania wyjściowego wprowadzona została zmienna sztuczna, wtedy sprawdzamy, czy w otrzymanym na końcu postępowania rozwiązaniu optymalnym wśród zmiennych bazowych znajduje się niezerowa zmienna sztuczna. Gdyby tak było, oznacza to, że wyjściowe zadanie jest sprzeczne.
4. ***Identyfikacja rozwiązań alternatywnych***
   Rozwiązania alternatywne istnieją wtedy, gdy przynajmniej jeden współczynnik optymalności dla zmiennej niebazowej przyjmuje wartość zero. Możemy zidentyfikować wszystkie rozwiązania alternatywne, wprowadzając kolejno te zmienne do bazy i przechodząc do kolejnych rozwiązań bazowych zgodnie z regułami opisanymi w dalszych krokach.
5. ***Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy***
   Służy do tego kryterium wejścia.
6. ***Badanie nieograniczoności funkcji celu i istnienia krawędzi sprawnej***
   Sprawdzamy, czy w kolumnie, odpowiadającej wybranej zmiennej, którą

zamierzamy wprowadzić do bazy, jest przynajmniej jedna liczba dodatnia. Jeżeli współczynnik optymalności odpowiadający tej zmiennej jest różny od zera oraz w rozpatrywanej kolumnie nie ma liczby dodatniej, oznacza to, że funkcja celu jest nieograniczona. Gdy współczynnik optymalności jest równy zeru oraz w rozpatrywanej kolumnie nie ma liczby dodatniej, oznacza to, że rozpatrywany wierzchołek jest początkiem nieograniczonej krawędzi optymalnej.

7. ***Wybór zmiennej usuwanej z bazy***
   Służy do tego kryterium wyjścia.
8. ***Sprowadzenie warunków ograniczających do postaci bazowej względem nowej bazy***
   Wykorzystujemy w tym celu przekształcenia elementarne.

1.5. Analiza wrażliwości

Mając rozwiązane zadanie programowania liniowego, możemy zastanawiać się nad tym, na ile jest ono wrażliwe na zmiany parametrów (wartości składowych wektora funkcji celu, wektora warunków ograniczających oraz macierzy współczynników). Chodzi o to, aby określić zakres zmian wymienionych parametrów, które nie powodują konieczności zmiany wyznaczonego uprzednio rozwiązania optymalnego (lub bazy optymalnej). Rozpatrzymy dalej dwa przypadki:

1) gdy zmianie ulegają składowe wektora funkcji celu,
2) gdy mamy do czynienia ze zmianami wartości wektora wyrazów wolnych.

1.5.1. Współczynniki funkcji celu

Rozpoczniemy od analizy wrażliwości współczynników funkcji celu, rozpatrując najpierw każdy z nich osobno. Z kolei zajmiemy się analizą łącznych zmian tych współczynników.

Przykład 1.8

Rozpatrzymy ponownie problem programowania produkcji, opisany w przykładzie 1.1. Zysk z wytworzenia jednostki P_1 wynosi obecnie c_1. W jakim przedziale powinna się znajdować wartość c_1, aby rozwiązanie bazowe $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, które otrzymaliśmy dla $c_1 = 2$, pozostało dla każdej wartości z tego zbioru optymalne?

Przypomnimy ostatnią tablicę simpleksową dla przykładu 1.1, traktując zysk jednostkowy c_1 jako parametr. Otrzymujemy (tablica 1.20):